ماخ

بنام خدا

جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

دفترچه سوالات و پاسخ تشریحی
مرحله دوم
اولین المپیاد ریاضی سال ۱۳۷۲

مدت آزمون (دقیقه)	تعداد سوالات	
	مساله‌های تشریحی	سوالات چند گزینه‌ای
۱۸۰	۵	-

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب ممنوع است.

تذکرات آزمون:

ضمن آرزوی موفقیت برای شما دانش‌پژوه گرامی، خواهشمند است قبل از پاسخ به سؤالات آزمون به موارد زیر توجه کنید:

- این آزمون شامل **۵ مسأله‌ی تشریحی** و وقت آن **۱۸۰ دقیقه** است.
- استفاده از ماشین‌حساب در این آزمون غیر مجاز است.
- همراه داشتن تلفن همراه (حتی خاموش) در طول زمان آزمون مجاز **نیست**.
- فقط داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سؤالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته باشند.
- انتشار و بازتولید این سوالات توسط **کمیته‌ی اجرایی ماخ** انجام شده است.

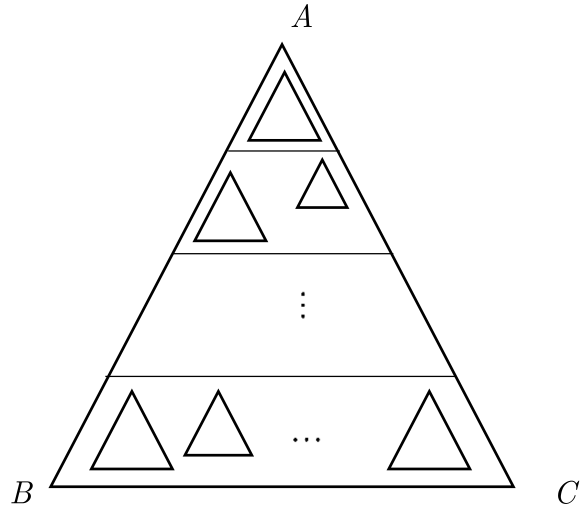
مسأله‌های اولین المپیاد ریاضی، آذرماه ۱۳۷۲
(برای دانش‌آموزان سال دوم دبیرستان)

۱- اگر $A = x + \frac{1}{x}$، مقدار عبارت $x^7 + \frac{1}{x^7}$ را برحسب A محاسبه کنید.

۲- ثابت کنید معادله‌ی $x^2 - 2xy + 2y^2 = 4y^3$ در مجموعه‌ی اعداد صحیح به‌جز $x = y = 0$ جواب دیگری ندارد.

۳- در مثلث ABC نقطه‌ی M وسط ضلع BC است. نیمساز درونی زاویه‌ی A، ضلع BC را در D قطع می‌کند و E قرینه‌ی نقطه‌ی A نسبت به نقطه‌ی M است. ثابت کنید پاره‌خط‌های AD، DE و $\left|AB - AC\right|$ اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه‌اند.

۴-



مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را در نظر می‌گیریم، ضلع AB را به n قسمت (نه لزوماً مساوی) تقسیم می‌کنیم. از نقاط تقسیم خطوطی موازی BC رسم می‌کنیم، آنگاه در هر یک از قسمت‌های به‌دست‌آمده در قسمت اول یک مثلث متساوی‌الاضلاع (دلخواه)، در قسمت دوم دو مثلث متساوی‌الاضلاع (دلخواه و متمایز [بدون اشتراک])، . . . و در قسمت nام، n مثلث متساوی‌الاضلاع (دلخواه و متمایز [بدون اشتراک]) طوری قرار می‌دهیم که قاعده‌ی آن‌ها موازی BC باشد. اگر ضلع مثلث ABC را a نامیده و اضلاع سایر مثلث‌ها را به ترتیب $a_1, a_2, \dots$ و a_m بنامیم (واضح است که $m = \frac{n(n+1)}{2}$)، آنگاه ثابت کنید که

الف) $\sum_{i=1}^{m} a_i^2 \leq a^2$ ب) $\sum_{i=1}^{m} a_i \leq \frac{m}{2} a$ $(m \neq 1)$.

۵- فرض کنید خانواده‌ی $A = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ که از $n \leq 6$ مجموعه‌ی متمایز ناتهی تشکیل‌شده است دارای این خاصیت باشد که اجتماع هر دو عضو از A دوباره عضوی از A باشد. ثابت کنید عضوی مانند x وجود دارد که لااقل در $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ تا از این مجموعه‌ها قرار دارد. ($\lceil a \rceil$ یعنی کوچک‌ترین عدد صحیح بزرگ‌تر یا مساوی a).

حل مسأله های اولین المپیاد ریاضی،
آذرماه ۱۳۷۲ (ویژه‌ی دانش آموزان سال دوم دبیرستان)

۱- ماخ اگر $A = x + \frac{1}{x}$ باشد، طرفین را مربع می‌کنیم. نتیجه می‌شود

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = A^2 - 2$$

طرفین دو رابطه را در یکدیگر ضرب می‌کنیم

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = A^3 - 3A$$

و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم

$$x^7 + \frac{1}{x^7} = A^7 - 7A^5 + 14A^3 - 7A$$

۲- ماخ

$$x^2 - 2xy + 2y^2 = 4y^3 \qquad (1)$$

$$x^2 - (2y)x + (2y^2 - 4y^3) = 0$$

$$x = y \pm \sqrt{y^2 - \ 2y^2 - 4y^3} = y \pm \sqrt{4y^3 - y^2} = y \pm y\sqrt{4y - 1}$$

برای اینکه x عدد درستی باشد و $y \neq 0$ ، باید زیر رادیکال مجذور کامل باشد یعنی $4y - 1 = k^2$. پس k باید فرد باشد.

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{k^2 + 1}{4} \\ k = 2n + 1 \end{array}\right\} \Rightarrow y = \frac{2n(n+1) + 1}{2}$$

به‌طوری‌که ملاحظه می‌شود صورت عددی است فرد و بر ۲ بخش‌پذیر نیست یعنی k نمی‌تواند مجذور کامل باشد. درنتیجه معادله‌ی (۱) به‌جز $x = y = 0$ ریشه‌ی صحیح دیگری ندارد.

۳- ماخ می‌دانیم که

$$\begin{cases} DB = \dfrac{ac}{b+c} \\ DC = \dfrac{ab}{b+c} \\ d_a^2 = bc - \dfrac{a^2bc}{(b+c)^2} \end{cases}$$

در مثلث CDE داریم

$$DE^2 = CE^2 + CD^2 - 2CE.CD\cos B$$

$$= c^{۲} + \frac{a^{۲}b^{۲}}{(b+c)^{۲}} - ۲c \times \frac{ab}{b+c} \times \frac{a^{۲} + c^{۲} - b^{۲}}{۲ac}$$

$$= \frac{c^{۲}\;\; b+c\;\; a^{۲}b^{۲} + a^{۲}b^{۲} - b(a^{۲}+c^{۲}-b^{۲})(b+c)}{(b+c)^{۲}}$$

$$= \frac{b+c\;\;\; c^{۲}\;\; b+c\;\; - b(a^{۲}+c^{۲}-b^{۲})\;\; + a^{۲}b^{۲}}{(b+c)^{۲}}$$

$$= \frac{b+c\;\;\; c^{۲}b + c^{۳} - a^{۲}b - bc^{۲} - b^{۳}\;\;\; + a^{۲}b^{۲}}{(b+c)^{۲}}$$

$$= \frac{bc^{۳} - a^{۲}b^{۲} + b^{۴} + c^{۴} - a^{۲}bc + b^{۳}c + a^{۲}b^{۲}}{(b+c)^{۲}}$$

$$= \frac{b^{۳}\;\; b+c\;\; + c^{۳}\;\; b+c\;\; + a^{۲}bc}{(b+c)^{۲}} = \frac{b+c\;\; +\;\; b^{۳}+c^{۳}\;\;\; + a^{۲}bc}{(b+c)^{۲}}$$

$$= \frac{b+c\;\;{}^{۲}\; +\;\; b^{۲}+c^{۲}-bc}{(b+c)^{۲}} - \frac{a^{۲}bc}{(b+c)^{۲}} = b^{۲}+c^{۲}-bc+d_a^{۲}-bc$$

$$= AD^{۲} + (AC-AB)^{۲}$$

۴- الف) این رابطه با در نظر گرفتن مساحت مثلث‌ها برقرار می‌شود.

اگر ضلع مثلث a باشد، ارتفاع آن $a\sqrt{۳}\,/\,۲$ و مساحت آن $a^{۲}\sqrt{۳}\,/\,۴$. برای مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a_i نیز مساحت $a_i^{۲}\sqrt{۳}\,/\,۴$ است که با مقایسه‌ی مساحت‌ها رابطه‌ی موردنظر حاصل می‌شود.

ب) ابتدا به این نکته توجه می‌کنیم که اگر در داخل مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a دو مثلث متساوی‌الاضلاع به اضلاع b و c داشته باشیم، داریم $a \geq b+c$. زیرا اگر ارتفاع مثلث اصلی را h_a و ارتفاع‌های دو مثلث دیگر را h_b و h_s بگیریم، خواهیم داشت $h_a \geq h_b + h_s$ و یا $\frac{a\sqrt{۳}}{۲} \geq \frac{b\sqrt{۳}}{۲} + \frac{c\sqrt{۳}}{۲}$ ، پس $a \geq b+c$. حال این رابطه را برای هر دو مثلث از مثلث‌های با اضلاع $a_۱$ ، . . . و a_m می‌نویسیم.

$$a_۱ + a_۲ \leq a$$
$$a_۱ + a_۳ \leq a$$
$$\vdots$$
$$a_۱ + a_m \leq a$$
$$a_۲ + a_۳ \leq a$$
$$\vdots$$
$$a_{m-۱} + a_m \leq a$$

حال طرفین را جمع می‌کنیم

$$(m-1)\sum_{i=1}^{m} a_i \le \frac{m(m-1)}{2}a$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \le \frac{m}{2}a$$

۵- اول نشان می‌دهیم که اگر حکم برای اعداد فرد n درست باشد، برای اعداد زوج نیز درست است. فرض کنید $n+1$ مجموعه با

$$|A_1| \le |A_2| \le \ldots \le |A_{n+1}|$$

($|A_i|$ یعنی تعداد اعضای مجموعه‌ی A_i) در فرض مسأله صدق کنند که n عددی فرد است. آنگاه خانواده‌ی

$$\mathcal{B} = \{A_2, A_3, \ldots, A_{n+1}\}$$

نیز در شرایط مسأله صدق می‌کند، درنتیجه عضوی وجود دارد به‌طوری‌که در لااقل $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ تا از اعضای B قرار دارد ولی $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$ زیرا n فرد است. پس کافی است به ازای $n = 1,3,5$ درستی حکم را ثابت کنیم. به ازای $n=1$ ، حکم واضح است. برای $n=3$ فرض کنید $|A_1| \le |A_2| \le |A_3| \le |A_4| \le |A_5|$. دو حالت موجود است:

حالت اول. به ازای دو مجموعه‌ی $A_j \not\subset A_1$ ، $1 \le i, j \le 4$ ، داریم $A_i \cup A_j \ne A_5$. در این صورت $A_i \underset{\neq}{\subset} A_i \cup A_j \underset{\neq}{\subset} A_5$ و هر عضو A_i جواب است.

حالت دوم. به ازای هر دو مجموعه‌ی A_i و A_j داریم $A_i \cup A_j \ne A_5$. در این صورت مجموعه‌ی A_1 لااقل با یکی از مجموعه‌های A_2 ، A_3 و A_4 دارای اشتراک ناتهی است. زیرا در غیر این صورت $A_2 \cup A_3 \cup A_4 \ne A_5$. اگر مثلاً $A_1 \cap A_2 \ne \varnothing$ ، در این صورت هر $x \in A_1 \cap A_2$ جواب است.